

Gabriela LAJČÁKOVÁ¹, Jozef MELCER²

VÝPOČTOVÉ MODELÝ BETÓNOVÝCH VOZOVIEK

COMPUTING MODELS OF CONCRETE PAVEMENTS

Abstrakt

Vozovky predstavujú dopravné konštrukcie vystavené dynamickým účinkom pohybujúcich sa vozidiel. Pre posúdenie ich správania sa je potrebné poznať zaťaženie skutočnými vozidlami. Tieto údaje je možné získať numerickou alebo experimentálnou cestou. Pri analýze železobetónových vozoviek je možné použiť rôzne výpočtové modely. Niektoré možnosti sú prezentované v tomto príspevku.

Klíčová slova

Betónové vozovky, dynamické zaťaženie, výpočtové modely, numerické modelovanie.

Abstract

Pavements represent the transport structures subjected to dynamic effect of moving vehicles. The real transport load is needed for the assessment of pavements. Such data can be obtained by numerical or experimental way. Various computing models can be used for the analysis of concrete pavements. Some possibilities are presented in this contribution.

Keywords

Concrete pavements, dynamic load, computing models, numerical modeling.

1 ÚVOD

Cesta je teoreticky nekonečne dlhá konštrukcia. Pri modelovaní účinkov pohyblivého zaťaženia je potrebné modelovať pomerne dlhý úsek cesty. Ak tvoríme výpočtový model v duchu metódy konečných prvkov, má takýto model veľa stupňov voľnosti. Pri priamom riešení v čase je potrebné numericky riešiť simultánnu sústavu diferenciálnych rovníc druhého rádu s veľkým počtom rovníc. Pretože s pohybujúcim sa zaťažením sa pohybuje aj deformačná vlna, ktorá od daného zaťaženia vzniká, sleduje sa priebeh zmien stavov napätosti a stavov deformácie v čase len v jednom bode alebo v jednom priečnom reze. Aby sa znížili nároky na simultánne riešenie veľkého počtu pohybových rovníc, často sa používa metóda rozvoja podľa tvarov vlastného kmitania, kedy pri výpočte sa uvažuje len niekoľko málo vlastných tvarov (v krajnom prípade len 1 tvar). Tým sa samozrejme potláčajú výhody a zmysel modelu MKP a vynára sa otázka, či použitie iných jednoduchších výpočtových modelov za takýchto podmienok neprinesie rovnaké výsledky pri oveľa menšom množstve vynaloženej práce. Ukazuje sa, že takáto cesta je schodná, ak sa prijme predpoklad o tvare ohybovej plochy vozovky od daného zaťaženia.

¹ Ing. Gabriela Lajčáková, PhD., Katedra stavebnej mechaniky, Stavebná fakulta, Žilinská univerzita, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, tel.: (+421) 41 513 5649, e-mail: gabriela.lajcakova@fstav.uniza.sk.

² Prof. Ing. Jozef Melcer, DrSc., Katedra stavebnej mechaniky, Stavebná fakulta, Žilinská univerzita, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, tel.: (+421) 41 513 5612, e-mail: jozef.melcer@fstav.uniza.sk.

2 VÝPOČTOVÉ MODELY BETÓNOVEJ VOZOVKY

Betónová vozovka sa betónuje ako kontinuálna železobetónová doska, ktorá sa dodatočne reže na menšie dilatčné celky. Pri numerickom modelovaní dynamických účinkov vozidiel je možné vozovku modelovať ako jednu dosku na pružnom podklade. Ak sa sledujú účinky vozidla na dosku iba v jednom bode, napríklad uprostred dosky, stačí prijať predpoklad o tvare ohybovej plochy dosky vyvolanej účinkom jednej kolesovej sily vozidla pôsobiacej v tomto bode a pohybovú rovnicu dosky riešiť v duchu Fourierovej metódy. Ak sa akceptuje platnosť Maxwelllovej vety o vzájomnosti posunutí, je možné časový priebeh výchyliek v sledovanom bode dosky získať tak, že sa vozidlo preženie po doske zdeformovanej do predpokladaného tvaru. V tomto prípade neznáma funkcia času v pohybovej rovnici dosky bude mať význam koeficienta úmernosti popisujúceho zmeny predpokladaných výchyliek dosky v čase.

Prijatý predpoklad o tvare ohybovej plochy dosky závisí od konštrukčného usporiadania a rozmerov vozovky. V tomto príspevku sú prezentované 3 možné prípady.

Pohybová rovnica tenkej dosky na Winklerovom pružnom podklade má tvar

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + K \cdot w + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\mu\omega_b \frac{\partial w}{\partial t} = p(x, y, t). \quad (1)$$

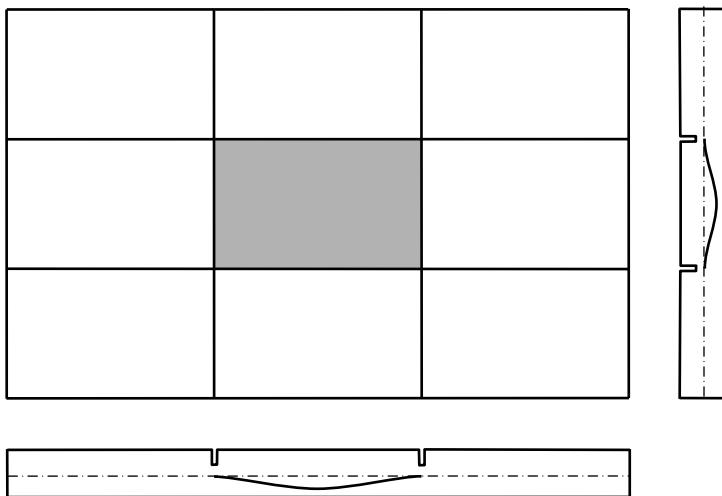
Hľadaná funkcia $w(x, y, t)$ sa v duchu Fourierovej metódy riešenia vyjadří v tvare

$$w(x, y, t) = w_0(x, y) \cdot q(t), \quad (2)$$

kde $w_0(x, y)$ je zavedený predpoklad o tvare ohybovej plochy dosky a $q(t)$ je koeficient úmernosti závislý na čase, majúci tu význam zovšeobecnenej Lagrangeovej súradnice.

V prípade, že sledovaná doska je súčasťou rozsiahlejšej vozovkovej plochy (letištné vozovky, viacpruhové cestné vozovky, obr. 1), je možné prijať predpoklad o tvare ohybovej plochy v tvare

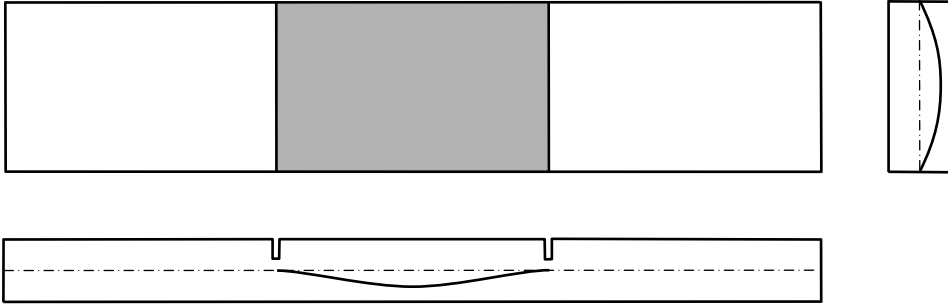
$$w_0(x, y) = \frac{1}{4} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l_x} \right) \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{l_y} \right). \quad (3)$$



Obr. 1: Doska ako súčasť rozsiahlej plochy vozovky

V prípade, že sa jedná o jeden doskový pás, tvorený radou dosiek situovaných za sebou v jednom pruhu (obr. 2), je možné prijať predpoklad o tvare ohybovej plochy v tvare

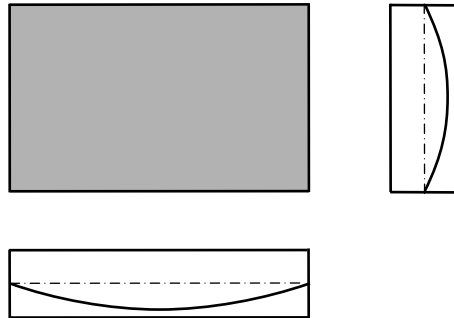
$$w_0(x, y) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l_x} \right) \cdot \left(\sin \frac{\pi y}{l_y} \right). \quad (4)$$



Obr. 2: Doska ako súčasť líniovej konštrukcie

V prípade, že by sa jednalo o jednu izolovanú dosku (obr. 3), je možné prijať predpoklad o tvare ohybovej plochy dosky v tvare

$$w_0(x, y) = \left(\sin \frac{\pi x}{l_x} \right) \cdot \left(\sin \frac{\pi y}{l_y} \right). \quad (5)$$



Obr. 3: Jedna izolovaná doska

Treba zdôrazniť, že rozhodujúci je tvar predpokladanej ohybovej plochy, nie sú potrebné jej skutočné hodnoty. Je to obdoba riešenia rozvojom do vlastných tvarov kmitania. Rozdiel je len v tom, že pri rozvoji do vlastných tvarov kmitania má predpoklad (2) tvar

$$w(x, y, t) = \sum_{j=1}^n w_j(x, y) \cdot q_j(t). \quad (6)$$

Predmetom výpočtu je v prípade rozvoja do vlastných tvarov viacej zovšeobecnených Lagrangeových súradníc $q_j(t)$.

Výraz pre $p(x, y, t)$ na pravej strane pohybovej rovnice dosky (1) predstavuje intenzitu spojitého zaťaženia premennú v mieste aj v čase. V prípade pohybu vozidla máme dočinenie s diskretným zaťažením, ktoré je potrebné nejakým spôsobom transformovať na dynamicky ekvivalentné spojité zaťaženie. Toto je možné urobiť postupom, ktorý navrhol Dirac [1].

$$p(x, y, t) = \sum_j \varepsilon_j \cdot F_j(t) \cdot \delta(x - x_j) \cdot \delta(y - y_j), \quad (7)$$

V prípade predpokladu (4) o tvare ohybovej plochy výraz (7) nadobudne tvar

$$p(x, y, t) = \sum_j \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn,j}(t) \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{m2\pi x}{l_x} \right) \cdot \left(\sin \frac{n\pi y}{l_y} \right), \quad (8)$$

kde

$$\begin{aligned} p_{mn,j}(t) &= \frac{2}{l_x} \cdot \frac{2}{l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \varepsilon_j \cdot F_j(t) \cdot \delta(x - x_j) \cdot \delta(y - y_j) \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{m2\pi x}{l_x} \right) \left(\sin \frac{n\pi y}{l_y} \right) dx dy = \\ &= \varepsilon_j \cdot F_j(t) \cdot \frac{4}{l_x l_y} \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{m2\pi x_j}{l_x} \right) \cdot \left(\sin \frac{n\pi y_j}{l_y} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Potom

$$\begin{aligned} p(x, y, t) &= \sum_j \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_j \cdot F_j(t) \cdot \frac{1}{l_x l_y} \cdot \left(1 - \cos \frac{m2\pi x_j}{l_x} \right) \cdot \left(\sin \frac{n\pi y_j}{l_y} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(1 - \cos \frac{m2\pi x}{l_x} \right) \cdot \left(\sin \frac{n\pi y}{l_y} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

S prihliadnutím na konvergenciu nekonečných radov v rovnici (10) môžeme zobrať do úvahy iba 1. člen týchto radov. Potom rovnicu (10) je možné vyjadriť v tvare

$$p(x, y, t) = \sum_j \varepsilon_j \cdot F_j(t) \cdot \frac{1}{l_x l_y} \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi x_j}{l_x} \right) \cdot \left(\sin \frac{\pi y_j}{l_y} \right) \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l_x} \right) \cdot \left(\sin \frac{\pi y}{l_y} \right). \quad (11)$$

Pre rovinný výpočtový model vozidla (obr. 4) platí

$$F_j(t) = -G_j + k_j \cdot d_j(t) + b_j \cdot \dot{d}_j(t), \quad (j = 6, 7, 8), \quad (12)$$

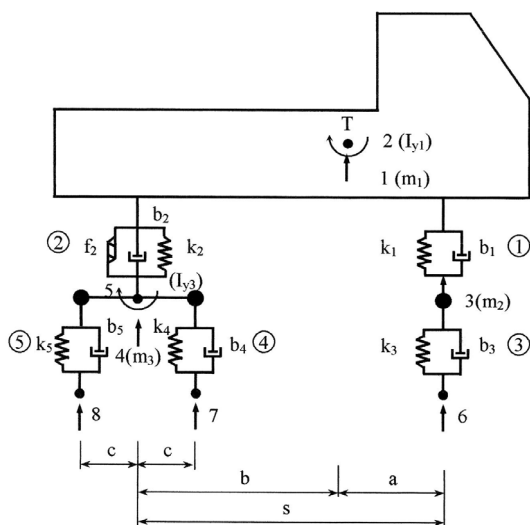
kde G_j je gravitačná sila pôsobiaca na j -tú nápravu, k_j a b_j sú konštanta tuhosti a súčiniteľ tlmenia j -tej nápravy a $d_j(t)$ deformácia pneumatiky j -tej nápravy. Derivácie s ohľadom na čas sú značené bodkou nad znakom nezávisle premennej.

Dosadením predpokladu (2) a (4) do rovnice (1) sa ľavá strana tejto rovnice zmení na tvar

$$\begin{aligned} &\ddot{q}(t) \cdot \left[\frac{1}{2} \mu \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l_x} \right) \cdot \sin \frac{\pi y}{l_y} \right] + \dot{q}(t) \cdot \left[\frac{1}{2} 2\mu \cdot \omega_b \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l_x} \right) \cdot \sin \frac{\pi y}{l_y} \right] + \\ &+ q(t) \cdot \left[-\frac{D}{2} \left(\frac{2\pi}{l_x} \right)^4 \cdot \cos \frac{2\pi x}{l_x} \cdot \sin \frac{\pi y}{l_y} - \frac{2D}{2} \left(\frac{2\pi}{l_x} \right)^2 \left(\frac{\pi}{l_y} \right)^2 \cdot \cos \frac{2\pi x}{l_x} \cdot \sin \frac{\pi y}{l_y} + \right. \\ &\left. + \frac{D}{2} \left(\frac{\pi}{l_y} \right)^4 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l_x} \right) \cdot \sin \frac{\pi y}{l_y} + \frac{K}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l_x} \right) \cdot \sin \frac{\pi y}{l_y} \right] = p(x, y, t). \end{aligned} \quad (13)$$

Keď sledujeme výchylky len v jednom bode, napríklad uprostred dosky, potom $x = l_x/2$ and $y = l_y/2$ a rovnica (1) nadobudne definitívny tvar

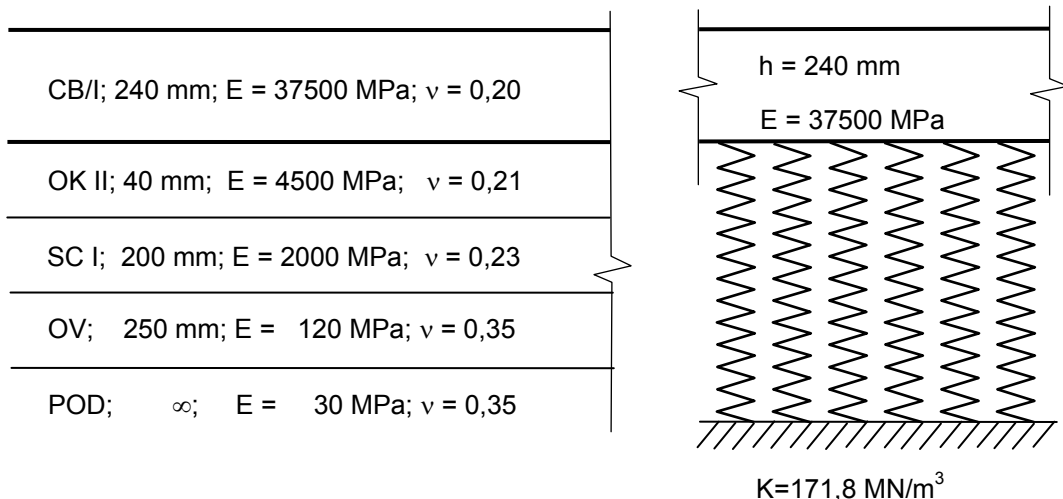
$$\begin{aligned} &\ddot{q}(t) \cdot \mu + \dot{q}(t) \cdot 2\mu \cdot \omega_b + q(t) \cdot D \cdot \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{l_x} \right)^4 + \left(\frac{2\pi}{l_x} \right)^2 \left(\frac{\pi}{l_y} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{l_y} \right)^4 + \frac{K}{D} \right] = \\ &= \sum_j \varepsilon_j \cdot F_j(t) \cdot \frac{2}{l_x l_y} \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi x_j}{l_x} \right) \cdot \left(\sin \frac{\pi y_j}{l_y} \right). \end{aligned} \quad (14)$$



Obr. 4: Rovinný výpočtový model vozidla

3 UKÁŽKA ZÍSKANÝCH VÝSLEDKOV

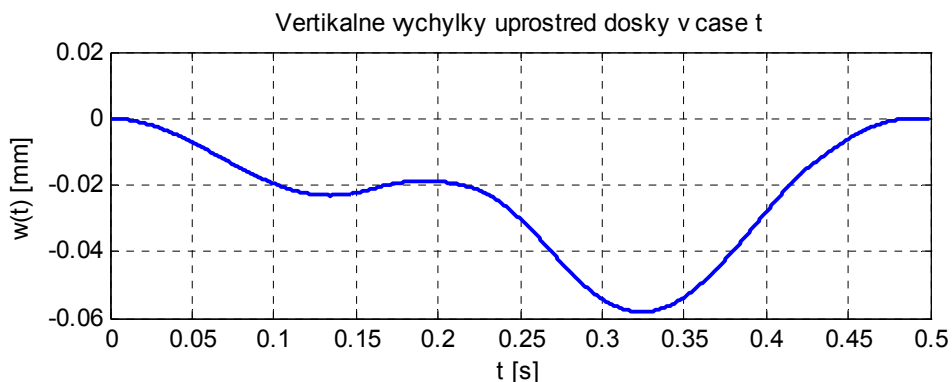
Numerické riešenia sa realizovali pre vozovku s nasledovnou skladbou, obr. 5.



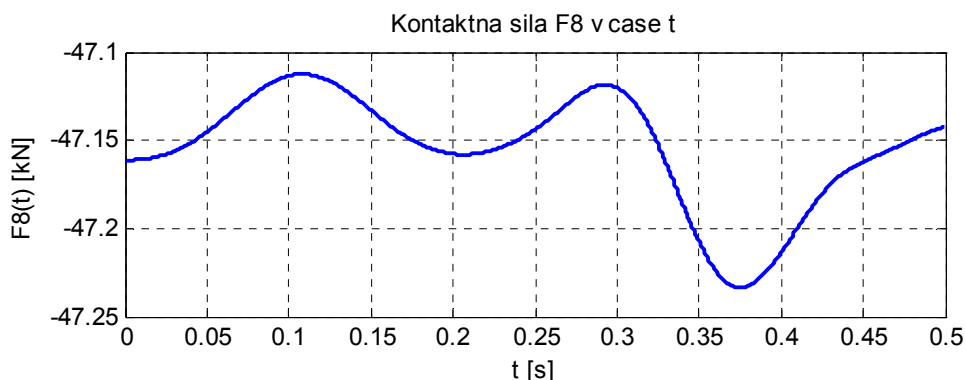
Obr. 5: Skladba betónovej vozovky a jej výpočtový model

Pri riešení sa použil predpoklad (4) o tvare ohybovej plochy dosky a rovinný polovičný model vozidla. Predpokladá sa, že vozidlo sa pohybuje v pozdĺžnej osi dosky a povrch vozovky je dokonale hladký. Ako výsledok riešenia je možné získať časové priebehy všetkých kinematických veličín vozidla, časové priebehy kinematických veličín dosky vozovky vzťahujúce sa k jej stredu a časové priebehy kontaktných síl pod jednotlivými nápravami vozidla.

Ako ukážka získaných výsledkov je na obr. 6 uvádzaný časový priebeh vertikálnych výchyliek uprostred dosky pri prejazde vozidla rýchlosťou 80 km/h a na obr. 7 časový priebeh kontaktných síl $F_8(t)$ pod zadným kolesom zadnej nápravy vozidla.



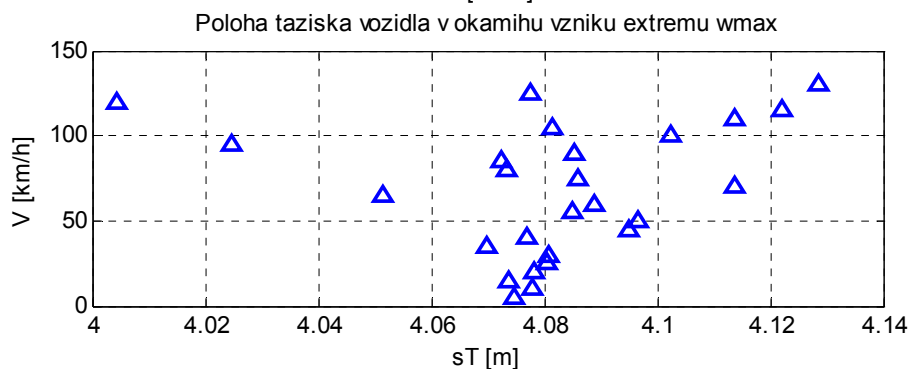
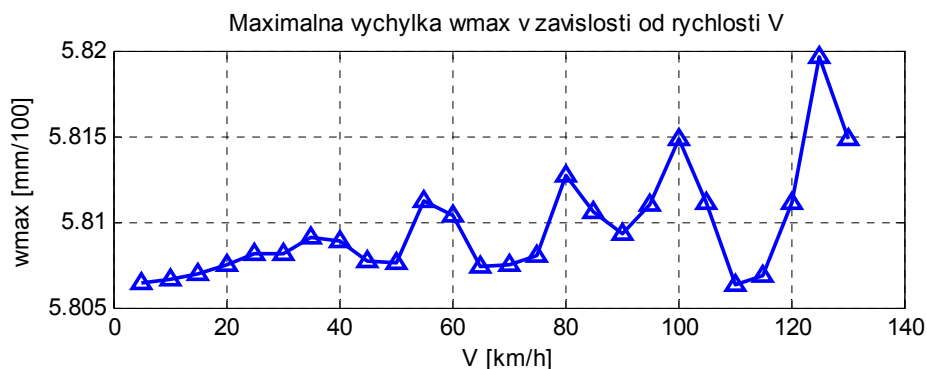
Obr. 6: Vertikálne výchylky uprostred dosky



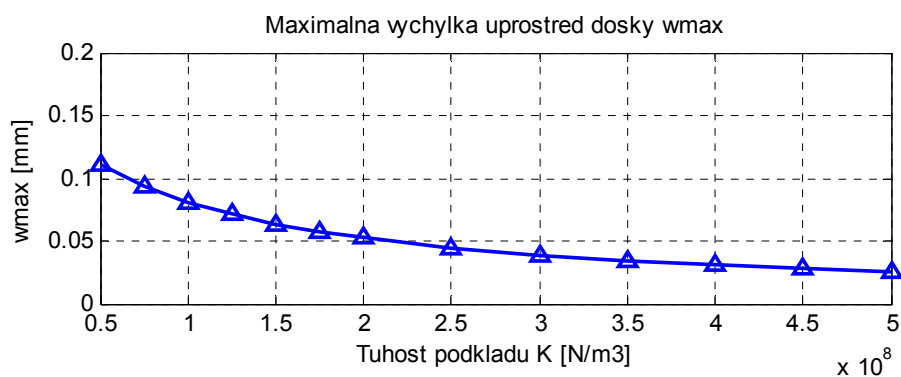
Obr. 7: Kontaktná sila pod zadným kolesom zadnej nápravy

Pri riešení problému vstupujú do hry rôzne parametre. Najdôležitejší z nich je rýchlosť pohybu vozidla, nakoľko o vplyve ostatných parametrov má zmysel hovoriť iba v súvislosti s konkrétnou rýchlosťou pohybu vozidla. Na obr. 8 je zobrazený vplyv rýchlosti pohybu vozidla na maximálne vertikálne výchylky uprostred dosky. Analýza je robená v rozsahu rýchlostí od 5 do 130 km/h s krokom 5 km/h. V obrázku je možné sledovať aj polohu ťažiska vozidla vzhľadom na začiatok dosky, kedy maximálna výchylka vzniká.

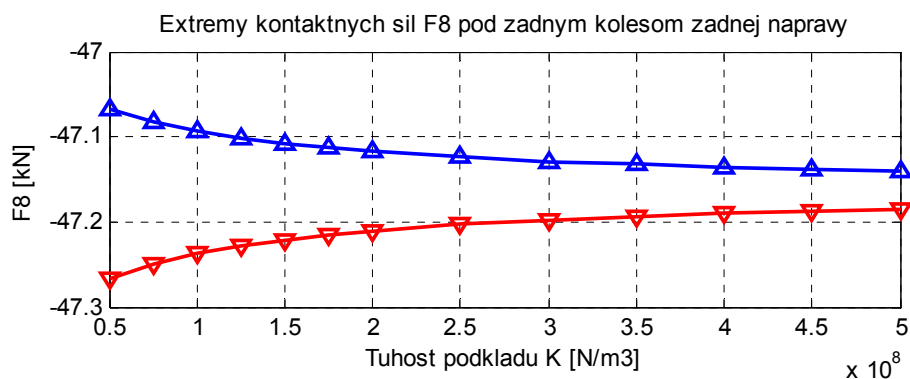
Ďalej je možné sledovať vplyv parametrov, ktoré ovplyvňujú tuhosť konštrukcie (modul stlačiteľnosti podložia K , hrúbka dosky h , modul pružnosti dosky E). Vo všetkých týchto prípadoch je možné urobiť nasledovné zovšeobecnia. V narastajúcou tuhosťou konštrukcie maximálne výchylky uprostred dosky klesajú a znižuje sa rozkmit medzi maximálnou a minimálnou hodnotou v časovom priebehu kontaktných síl. Na obr. 9 sú zobrazené maximá vertikálnych výchyliek uprostred dosky v závislosti od tuhosti podkladu K a na obr. 10 podobná závislosť pre extrémny kontaktné sily (maximá, minimá) pod zadným kolesom zadnej nápravy. Modul stlačiteľnosti podkladu K sa menil v intervale od $50,0 \cdot 10^6 \text{ N/m}^3$ do $500,0 \cdot 10^6 \text{ N/m}^3$. V intervale od $50,0 \cdot 10^6 \text{ N/m}^3$ do $200,0 \cdot 10^6 \text{ N/m}^3$ s krokom $25,0 \cdot 10^6 \text{ N/m}^3$ a v intervale od $200,0 \cdot 10^6 \text{ N/m}^3$ do $500,0 \cdot 10^6 \text{ N/m}^3$ s krokom $50,0 \cdot 10^6 \text{ N/m}^3$.



Obr. 8: Vplyv rýchlosti pohybu vozidla



Obr. 9: Vplyv tuhosti podkladu na w_{max}



Obr. 10: Vplyv tuhosti podkladu na kontaktnú silu F_8

4 ZÁVER

Cestné komunikácie sú dopravné konštrukcie vystavené intenzívnym dynamickým účinkom pohybujúcich sa vozidiel [2]. V ostatnom čase sa pri stavbe ciest používajú betónové vozovky. Poznanie správania sa takejto konštrukcie pri pohybe dopravných prostriedkov je potrebné pri riešení mnohých inžinierskych úloh. Pri numerických simuláciách pohybu vozidiel po vozovke je možné modelovať vozovku ako tenkú dosku na pružnom podklade. Prijatím predpokladu o tvare ohybovej plochy dosky za predpokladu platnosti Maxwellovej vety o vzájomnosti posunutí je možné vytvoriť výpočtový model umožňujúci riešiť mnohé úlohy týkajúce sa dynamických účinkov vozidiel na vozovky [3]. Je možné sledovať vybrané kinematické veličiny na vozidle a doske a zmeny kontaktných síl pod jednotlivými kolesami vozidla. Je možné vykonávať intervalovú analýzu a sledovať ako vplyv jednotlivých parametrov systému vplyva na odozvu sústavy. Výsledky získané v časovej oblasti je možné transformovať do frekvenčnej oblasti a použiť pri riešení iných inžinierskych úloh [4].

PODAKOVANIE

Príspevok vznikol v rámci riešenia projektu MŠ SR VEGA 1/0259/12.

LITERATÚRA

- [1] FRÝBA, L. *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*. ACADEMIA Praha, Noordhoff International Publishing, Groningen, 1972.
- [2] LAJČÁKOVÁ, G.: Vplyv parametrov vozidla na interakčné sily vznikajúce medzi kolesom a jazdnou dráhou. *Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava*, roč. X, č. 1, 2010, řada stavební, ISSN1213-1962, s.183-190.
- [3] LAJČÁKOVÁ, G., MELCER, J.: Dynamic effect of moving vehicles on road concrete slab. *Communications, Scientific letters of the University of Žilina*, Vol. 13, No. 3, 2011, EDIS – Publishing Institution of Žilina University, 2011, ISSN 1335-4205, p. 14-18.
- [4] PETŘÍK, T., LEDNICKÁ, M., KALÁB, Z., HRUBEŠOVÁ, E.: Hodnocení technické seizmicity v okolí rekonstruované komunikace. *Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava*, roč. XII, č. 1, 2012, řada stavební, ISSN1213-1962, s.39-48.

Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. Norbert Jendželovský, PhD., Katedra stavebnej mechaniky, Stavebná fakulta, STU v Bratislave.

Doc. Ing. Alexander Tesár, DrSc., Ústav stavebníctva a architektúry, Slovenská akadémia vied, Bratislava.